

# 三维 FDTD 方法中高效平面波源的引入

吴 博,王 辉,黄志祥,吴先良

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,安徽合肥 230039)

**摘 要:** 应用分裂平面波时域有限差分(Splitting Plane wave Finite Difference Time Domain, SP-FDTD)方法到三维时域有限差分(Finite Difference Time Domain, FDTD)中引入高效平面波源.该方法基于分裂场思想,在一维 FDTD 上构造了新的迭代公式,使得一维 FDTD 和三维 FDTD 离散网格之间的数值相速度一致,消除了由于相速不一致而在总场区引起的泄漏误差以及插值带来的数值误差.通过数值算例验证了 SP-FDTD 方法对不同波源在任意角度(斜入射)下的平面波入射都是有效的,且泄露误差均在  $-300\text{dB}$  水平.

**关键词:** 分裂平面波 FDTD 方法; 分裂场; 平面波

**中图分类号:** TN801      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)06-1086-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.06.008

## Efficient Plane Wave Injection for 3D FDTD Method

WU Bo, WANG Hui, HUANG Zhi-xiang, WU Xian-liang

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** The method of SP-FDTD (Splitting Plane wave Finite Difference Time Domain) is applied to 3D FDTD (Finite Difference Time Domain) method for plane wave incidence. Based on the split-field formulation, the method has the new iterative equations and can eliminate the error of interpolation and discretized phase velocity mismatch between 1D FDTD and 3D FDTD grid. Numerical results show that the present method is valid for different type of wave sources, and accuracy for oblique incident plane wave, with the leakage error on the order of  $-300\text{dB}$ .

**Key words:** SP-FDTD method; split-field; plane wave

## 1 引言

作为计算电磁学领域最受欢迎的数值计算方法之一,时域有限差分(FDTD)方法在仿真天线<sup>[1]</sup>、处理复杂媒质<sup>[2]</sup>的电磁散射等问题上较其他数值计算方法有着显著的优势.利用 FDTD 方法进行建模、仿真求解散射目标近场特性或者 RCS(Radar Cross-Section)等电磁散射问题时需要在建模过程中引入合适的、稳定的、正确的平面波源,这时就需要用到总场/散射场分离(TF/SF)技术<sup>[3]</sup>.TF/SF把仿真区域划分为两个场区:总场区和散射场区,其中总场区内存在入射波和散射波,散射场区内则只有散射波.总场区和散射场区由惠更斯面连接,利用连接边界条件就可以在惠更斯面上生成向总场区传播的入射平面波.这种方法非常适合处理只对目标散射特性感兴趣的电磁散射问题.

在利用 TF/SF (Total Field/Scattered Field) 引入平面

波的过程中需要已知惠更斯面周围所需场点处入射波的场值,要得到这些入射场,一般利用平面波的一维特性,在一维上仿真随时间逐步推进的入射平面波源,然后利用插值技术得到惠更斯面周围所需场点处入射波的场值,从而利用连接边界条件在总场区引入了平面波,这种方法称为 IFA (1D Incident Field Array)<sup>[4]</sup>方法.尽管这种方法引入了平面波,但是由于一维 FDTD 与二维 FDTD、三维 FDTD 的色散关系式不同(即色散不匹配),那么在一维 FDTD 网格上仿真的平面波源与在二维、三维 FDTD 网格上仿真的平面波的数值相速必然不同(垂直入射除外),所以二维或三维 FDTD 的连接边界条件中用到的入射场值,如果是取自一维 FDTD 仿真得到的人射平面波源必然会有一定的误差,使得入射波泄露到散射场区,影响散射场的计算精度.最初形式的 IFA 方法造成的泄露很大,即使后来利用信号压缩技术改进的 IFA 方法所造成的泄露也只能达到  $-70\text{dB}$  的水平<sup>[5]</sup>.

收稿日期:2013-01-31;修回日期:2013-04-23;责任编辑:梅志强

基金项目:国家自然科学基金(No. 60931002, No. 61101064, No. 51277001);安徽省杰出自然科学基金(No. 1108085J01);安徽省高校自然科学基金(No. KJ2011A002, No. KJ2011A242, No. KJ2012A013);教育部新世纪优秀人才基金(No. NCET-12-0596);教育部博士点基金资助课题(No. 20123401110009)

在文献[6]中,作者提出了一种基于分裂场思想的平面波源引入方法—分裂平面波 FDTD (SP-FDTD) 方法,解决了二维 FDTD 中平面波斜入射时的泄露问题,取得了很好的效果.本文将 SP-FDTD 方法进一步推广至三维 FDTD,处理三维 FDTD 平面波的斜入射问题.结合具体仿真实例验证了 SP-FDTD 在三维 FDTD 中的高效性.

## 2 理论基础

在无源、无耗、各向同性媒质中,麦克斯韦方程组的两个旋度方程在一维和三维自由空间中的形式分别为式(1)和式(2):

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_r^{\text{inc}}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{H}_r^{\text{inc}}}{\partial r} \\ -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_r^{\text{inc}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_r^{\text{inc}}}{\partial r} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

式(1)中下标“r”与上标“inc”表示该场分量是位于一维 FDTD 网格上的入射波场分量.式(2)中  $\mathbf{r} = (x \ y \ z)$  表示的是三维空间场点距离平面波入射原点的距离,且  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_x(\mathbf{r}, t) \ E_y(\mathbf{r}, t) \ E_z(\mathbf{r}, t))$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (H_x(\mathbf{r}, t) \ H_y(\mathbf{r}, t) \ H_z(\mathbf{r}, t))$ .如图 1 所示,设平面波沿  $\mathbf{P} = (p_x \ p_y \ p_z) = (\sin\theta \cos\varphi \ \sin\theta \sin\varphi \ \cos\theta)$  方向传播,其中  $\theta$ 、 $\varphi$  分别为平面波入射方向与  $z$  轴、 $x$  轴正方向的夹角.

将一维 FDTD 网格点上的电场和磁场分别进行分裂,

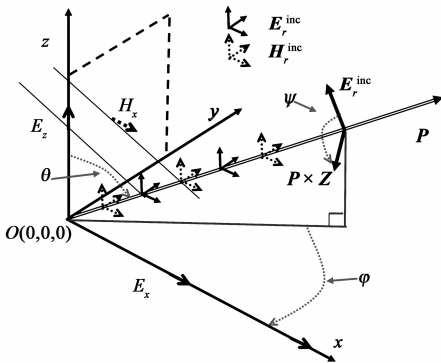


图1 三维FDTD网格和一维FDTD网格示意图,其中 $\psi$ 为极化方向角

$$\mathbf{E}_r^{\text{inc}} = e_x E_{rx}^{\text{inc}} + e_y E_{ry}^{\text{inc}} + e_z E_{rz}^{\text{inc}} \quad (3a)$$

$$\mathbf{H}_r^{\text{inc}} = e_x H_{rx}^{\text{inc}} + e_y H_{ry}^{\text{inc}} + e_z H_{rz}^{\text{inc}} \quad (3b)$$

分裂后的场仍然位于同一网格点,且网格离散步长  $\Delta r$  满足

$$\Delta r = \frac{p_x \Delta x}{m_x} = \frac{p_y \Delta y}{m_y} = \frac{p_z \Delta z}{m_z} \quad (4)$$

其中  $m_x$ 、 $m_y$ 、 $m_z$  均为奇数.根据式(3a)和(3b),式(1)可改写为:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_r^{\text{inc}} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_r^{\text{inc}}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_r^{\text{inc}} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_r^{\text{inc}}}{\partial t} \end{cases} \quad (5)$$

对式(5)采用和三维 FDTD 一致的差分离散格式可得到该一维 FDTD 的迭代公式(6a)及(6b)<sup>[6]</sup>.在此仅给出电场和磁场  $x$  方向分量的迭代公式, $y$ 、 $z$  方向分量迭代公式可类似得到.

$$\begin{aligned} H_{rx}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+1/2}^{n+1/2} &= H_{rx}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+1/2}^{n-1/2} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_{rz}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+(1+m_y)/2}^n - E_{rz}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+(1-m_y)/2}^n}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_{ry}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+(1+m_z)/2}^n - E_{ry}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+(1-m_z)/2}^n}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} E_{rx}^{\text{inc}} \Big|_{i_r}^{n+1} &= E_{rx}^{\text{inc}} \Big|_{i_r}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ \frac{H_{rz}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+m_y/2}^{n+1/2} - H_{rz}^{\text{inc}} \Big|_{i_r-m_y/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_{ry}^{\text{inc}} \Big|_{i_r+m_z/2}^{n+1/2} - H_{ry}^{\text{inc}} \Big|_{i_r-m_z/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (6b)$$

可以证明满足这样一组迭代公式的一维 FDTD 的色散关系式与相应的三维 FDTD 的色散关系式相同.

由迭代公式(6a)、(6b)仿真的平面波的入射方向  $\varphi$ 、 $\theta$  由下式确定:

$$\tan\varphi = \frac{\Delta x/m_x}{\Delta y/m_y} \quad (7a)$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(m_x/\Delta x)^2 + (m_y/\Delta y)^2}}{m_z/\Delta z} \quad (7b)$$

由上式可以看出, $\varphi$ 、 $\theta$  是与  $m_x$ 、 $m_y$ 、 $m_z$  值的选取相关的,需要注意的是当  $m_x$ 、 $m_y$ 、 $m_z$  不同时为 1 时,一维 FDTD 场分量的迭代需要对多点赋值源.

## 3 数值算例

为了验证 SP-FDTD 方法在三维 FDTD 中引入斜入射平面波的有效性,下面针对不同波源在不同入射方向下的平面波入射问题进行了仿真.算例中都设置总场区为  $160\Delta \times 160\Delta \times 60\Delta$  ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ ),总场区周围为  $20\Delta$  的散射场区,最外层为 PEC 边界.为了测量入射波的泄露水平,总场区没有散射体,那么理论上散射场区的场值应该为零,所以散射场区的场值被认为是入射波泄露到散射场区的水平(即泄露误差).为此我们分别在总场区选择了观测点  $Q_{T1}(22\Delta, 22\Delta, 22\Delta)$  和  $Q_{T2}(178\Delta, 178\Delta, 22\Delta)$ ,在散射场区选择了观测点  $Q_{S1}(18\Delta, 18\Delta, 18\Delta)$  和  $Q_{S2}(178\Delta, 178\Delta, 18\Delta)$ ,其中点

$Q_{T1}$ 、 $Q_{S1}$ 距离平面波的入射源点  $O(0,0,0)$  较近,  $Q_{T2}$ 、 $Q_{S2}$ 则距离  $O$  点较远.

### 3.1 正弦源的引入

选择频率为 1GHz 的正弦波作为入射波源. 空间网格步长  $\Delta = 0.015\text{m}$ , 时间步长  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-11}\text{s}$ . 图 2 给出了入射方向为  $\varphi \approx 78.7^\circ$ ,  $\theta \approx 36.1^\circ$  ( $m_x = 1$ ,  $m_y = 5$ ,  $m_z = 7$ ) 和  $\Psi = 10^\circ$  的平面波运行 1000 个时间步时电场  $E_x$  在  $yoz$  平面 ( $x = 100\Delta$ ) 的分布图, 由该图可以看出总场区内的波是以斜入射的形式向前传播的, 且散射场区内无明显泄露. 图 3 给出的是在上述入射方向下不同观测点处的电场  $E_x$  随迭代时间的变化曲线. 图 4 为平面波在  $\varphi \approx 15.3^\circ$ ,  $\theta \approx 66.3^\circ$  ( $m_x = 11$ ,  $m_y = 3$ ,  $m_z = 5$ ) 和  $\Psi = 10^\circ$  方向入射下运行 1000 个时间步时得到的各个观测点处电场分量值  $E_x$  随迭代时间的变化曲线.

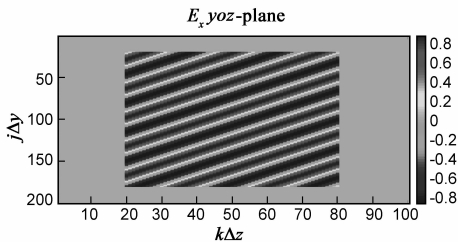


图2 电场 $E_x$ 在1000时间步时分布切面图

由图 3、图 4 可以看出, 与总场区的场值相比, 散射场区的场值被压缩在  $10^{-15}$  数量级, 即表明入射波泄露到散射场区的值在  $-300\text{dB}$  的水平. 另外由图 3、图 4 中的总场区场点  $Q_{T1}$ 、 $Q_{T2}$  的曲线可以看出, 在平面波到达的开始阶段, 波形轻微失真, 这主要是因为在一维 FDTD 网格上当  $m_x$ 、 $m_y$ 、 $m_z$  不同时为 1 时对多点赋硬源造成的, 但是随后的时间步里, 其波形达到稳定.

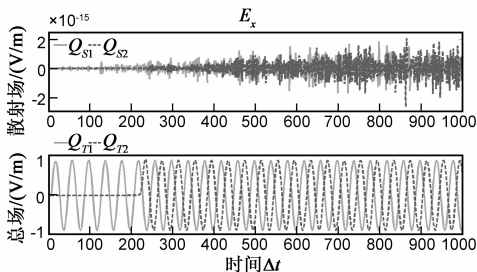


图3 不同观测点处电场分量 $E_x$ 随时间的变化曲线, 平面波的入射方向为 $\varphi \approx 78.7^\circ$ ,  $\theta \approx 36.1^\circ$ 和 $\Psi = 10^\circ$

### 3.2 调制高斯源的引入

考虑采用调制的高斯脉冲源为激励源, 其时域形式为:  $s(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-4\pi((t-t_0)/\tau)^2}$ , 中心频率  $f_0 = 2\text{GHz}$ ,  $\tau = 2 \times 10^{-9}$ ,  $t_0 = 6 \times 10^{-9}$ . 离散网格步长为  $\Delta = 0.0075\text{m}$ , 离散时间步长  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-11}\text{s}$ . 图 5、图 6 分别给出了平面波在不同角度入射下运行 1000 个时间步

时得到的观测点处电场分量  $E_x$  随时间的变化曲线.

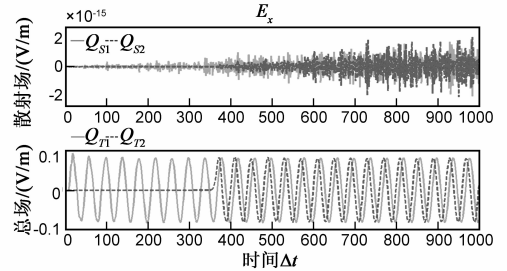


图4 不同观测点处电场分量 $E_x$ 随时间的变化曲线, 平面波的入射方向为 $\varphi \approx 15.3^\circ$ ,  $\theta \approx 66.3^\circ$ 和 $\Psi = 10^\circ$

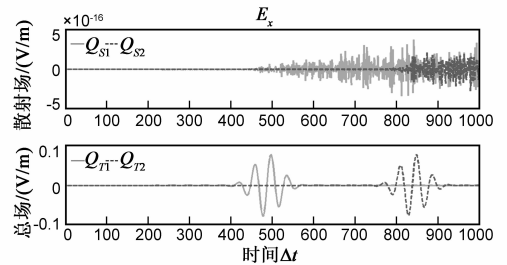


图5 观测点处电场分量 $E_x$ 随时间的变化曲线, 平面波的入射方向为 $\varphi \approx 78.7^\circ$ ,  $\theta \approx 36.1^\circ$ 和 $\Psi = 10^\circ$

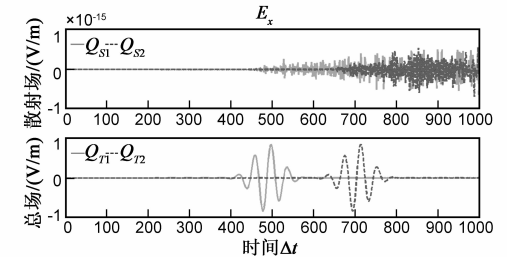


图6 观测点处电场分量 $E_x$ 随时间的变化曲线, 平面波的入射方向为 $\varphi \approx 15.3^\circ$ ,  $\theta \approx 66.3^\circ$ 和 $\Psi = 10^\circ$

图 5 的平面波入射方向为  $\varphi \approx 78.7^\circ$ ,  $\theta \approx 36.1^\circ$  ( $m_x = 1$ ,  $m_y = 5$ ,  $m_z = 7$ ) 和  $\Psi = 10^\circ$ , 图 6 的平面波入射方向为  $\varphi \approx 15.3^\circ$ ,  $\theta \approx 66.3^\circ$  ( $m_x = 11$ ,  $m_y = 3$ ,  $m_z = 5$ ) 和  $\Psi = 10^\circ$ . 由图 5、图 6 中的总场区曲线可以看出  $Q_{T2}$  点处的曲线和  $Q_{T1}$  点处的曲线波形相同, 只是有一段时间步的滞后, 这是由于平面波首先到达  $Q_{T1}$  点后到达  $Q_{T2}$  点的缘故. 另外由图中散射场点处的  $E_x$  值曲线可以看出, 散射场区的泄露误差也在  $-300\text{dB}$  的水平.

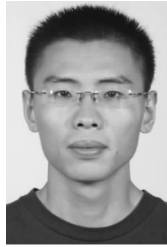
## 4 结论

本文对 SP-FDTD 方法在三维 FDTD 中的应用进行了研究, 对平面波在单频、宽频以及不同方向入射下的情况进行了仿真, 结果显示散射场区泄露误差在  $-300\text{dB}$  的水平, 而且长时间的运行生没发现不稳定现象, 论文的结果可为弱电磁散射的计算提供有效的、可供参考的时域电磁计算方法.

## 参考文献

- [1] 李龙, 张玉, 梁昌洪. 波导宽边缝隙天线的改进共形 FDTD 分析[J]. 电子学报, 2003, 31(6): 860 – 863.  
LI Long, ZHANG Yu, LIANG Chang-Hong. A modified locally conformal finite-difference time-domain technique for a slot antenna in a rectangular waveguide broadwall[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(6): 860 – 863. (in Chinese)
- [2] 刘广东, 张业荣. 一种处理分层有耗色散介质的时域逆散射方法[J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2856 – 2862.  
LIU Guang-Dong, ZHANG Ye-Rong. An approach to the time-domain inverse scattering problem for the stratified frequency-dispersive lossy media[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2856 – 2862. (in Chinese)
- [3] A Taflove, S C Hagness. Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time-Domain Method [M]. Boston, MA: Artech House, 2005.
- [4] S C Winton, P Kosmas, C M Rappaport. FDTD simulation of TE and TM plane waves at nonzero incidence in arbitrary layered media [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2005, 53(5): 1721 – 1728.
- [5] U Oguz, L Gurel. An efficient and accurate technique for the incident-wave excitations in the FDTD method[J]. IEEE Trans Micro Thory Tec, 1998, 46(6): 869 – 882.
- [6] 王辉, 黄志祥, 吴先良. 高效分裂平面波 FDTD 方法研究 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(4): 604 – 608.  
WANG Hui, HUANG Zhi-Xiang, WU Xian-Liang. Research on an efficient splitting plane-wave FDTD method [J]. Journal of Hefei University of Technology, 2010, 33(4): 604 – 608. (in Chinese)

## 作者简介



吴 博 男, 讲师, 1983 年 11 月出生. 2013 年 6 月博士毕业于安徽大学物理电子学专业, 目前主要从事光波段新型人工电磁媒质时域仿真算法及其应用研究.

E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn